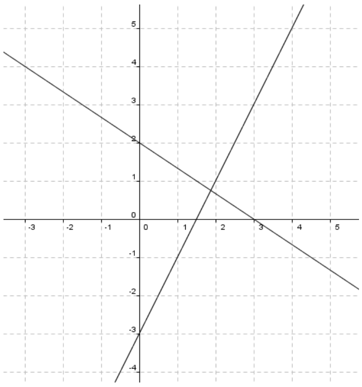
Hoofdstuk 9: Lijnen en cirkels.

9.1 Vergelijkingen van lijnen.

<u>Opgave 1:</u>

a.



b. $y = 2x - 3$

$2x - y = 3$

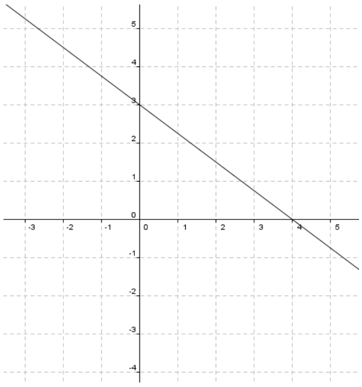
c. $2x + 3y = 6$

$3y = -2x + 6$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$

<u>Opgave 2:</u>

a.



b. $3 \cdot 8 + 4 \cdot -3 = 24 - 12 = 12$ dus punt A ligt op lijn k

$3 \cdot 5 + 4 \cdot -1 = 15 - 4 = 11$ dus punt B ligt niet op lijn k

$3 \cdot -6 + 4 \cdot 7\frac{1}{2} = -18 + 30 = 12$ dus punt C ligt op lijn k

$3 \cdot 2p + 4 \cdot (3 - 1\frac{1}{2}p) = 6p + 12 - 6p = 12$ dus punt D ligt op lijn k

c. $3q + 4(q+1) = 12$

$3q + 4q + 4 = 12$

$7q = 8$

$q = \frac{8}{7}$

d. $3x + 4y = c$ door $(5,6)$

$15 + 24 = c$ dus $c = 39$

$l: \quad 3x + 4y = 39$

e. $3x + 4y = c$ door $(p, 2p)$

$3p + 8p = c$
$c = 11p$
$m: \quad 3x + 4y = 11p$

Opgave 3:

a. snijpunt met *x*-as: $y = 0$
$2x = 12$
$x = 6$ dus $(6,0)$
snijpunt met *y*-as: $x = 0$
$3y = 12$
$y = 4$ dus $(0,4)$

b. $2x + 3y = 12$
deel links en rechts door 12
$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

c. $\frac{x}{6}$ levert in de noemer het snijpunt met de *x*-as
$\frac{y}{4}$ levert in de noemer het snijpunt met de *y*-as

Opgave 4:

a. $y = 0$
$\frac{x}{a} = 1$
$x = a$ dus $(a,0)$

b. $x = 0$
$\frac{y}{b} = 1$
$y = b$ dus $(0,b)$

Opgave 5:

a. $rc = 2$

b. $3 - 3 = 2 \cdot (4 - 4)$
$0 = 0$ klopt

c. $rc = m$
$y_A - y_A = m \cdot (x_A - x_A)$
$0 = 0$ klopt

d. $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$
$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$

Opgave 6:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 12 & \times 1 \\ 3x - y = -9 & \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+3y=12 \\ 9x-3y=-27 \end{cases} \quad +$$

$13x=-15$

$x=-\frac{15}{13}$

$-\frac{45}{13}-y=-9$

$-y=-5\frac{7}{13}$

$y=5\frac{7}{13}$

dus het snijpunt is $(-\frac{15}{13},5\frac{7}{13})$

Opgave 7:

a. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$

dus lijn k: $x-2y=2$

$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$

dus lijn l: $3x-5y=15$

b. $\begin{cases} x-2y=2 & \times 5 \\ 3x-5y=15 & \times 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x-10y=10 \\ 6x-10y=30 \end{cases} \quad -$$

$-x=-20$

$x=20$

$20-2y=2$

$-2y=-18$

$y=9$

dus het snijpunt is $(20,9)$

Opgave 8:

a. k: $y-1=\frac{3-1}{4-2}\cdot(x-2)$

$y-1=1\cdot(x-2)$

$y-1=x-2$

$y=x-1$

l: $y-5=\frac{0-5}{4--1}\cdot(x--1)$

$y-5=-1\cdot(x+1)$

$y-5=-x-1$

$y=-x+4$

b. $x-1=-x+4$

$2x=5$

$x=2\frac{1}{2}$

$y=1\frac{1}{2}$

dus het snijpunt is $(2\frac{1}{2},1\frac{1}{2})$

Opgave 9:

a. Jan mist de lijn $x = 0$, van een verticale lijn bestaat de rc niet, dus kun je de vergelijking niet schrijven in de vorm $y = ax + b$

Harm mist de lijn $y = 3$

$\frac{x}{p} + \frac{3}{3} = 1$

$\frac{x}{p} = 0$ voor geen enkele waarde van p komt hier 0 uit

b. $x = 4$

c. $y = 0$

Opgave 10:

a. $rc = -2$ door het punt $(0, p)$

b. door het punt $(-6,4)$ met $rc = p$

c. $m: \quad px + 3y = 6$

$3y = -px + 6$

$y = -\frac{1}{3}x + 2$

door het punt $(0,2)$ met $rc = -\frac{1}{3}p$

d. door het punt $(p,0)$ en $(0,2p)$

Opgave 11:

a. $3p + 10 = 8$

$3p = -2$

$p = -\frac{2}{3}$

b. $3p = 8$

$p = \frac{8}{3}$

c. $p : 2 = 3 : 5$

$p = \frac{3}{2\frac{1}{2}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

d. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

$5x + 2y = 10$

$p = 5$

Opgave 12:

a. $\frac{3}{p} + \frac{4}{p+2} = 1$

$\frac{3(p+2)}{p(p+2)} + \frac{4p}{p(p+2)} = 1$

$\frac{3(p+2) + 4p}{p(p+2)} = 1$

$3(p+2) + 4p = p(p+2)$

$3p + 6 + 4p = p^2 + 2p$

$p^2 - 5p - 6 = 0$

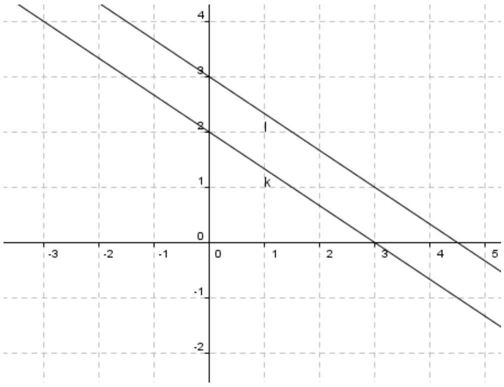
$$(p-6)(p+1)=0$$
$$p=6 \quad \vee \quad p=-1$$

b. $\frac{x}{p}+\frac{y}{p+2}=1$

$$\frac{y}{p+2}=-\frac{x}{p}+1$$
$$y=-\frac{p+2}{p}\cdot x+p+2$$
$$rc=-\frac{p+2}{p}=2$$
$$-(p+2)=2p$$
$$-p-2=2p$$
$$-3p=2$$
$$p=-\tfrac{2}{3}$$

Opgave 13:

a.



b. $\begin{cases}2x+3y=6 & \times 2\\ 4x+6y=18 & \times 1\end{cases}$

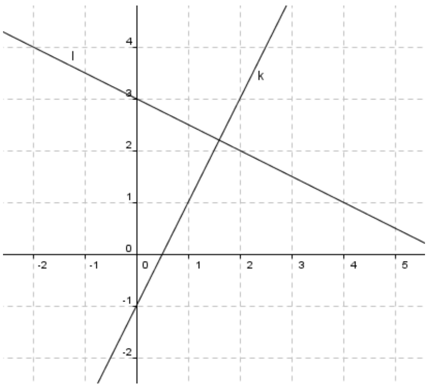
$$\begin{cases}4x+6y=12\\ 4x+6y=18 & -\end{cases}$$

$0=-6$ klopt niet, dus geen oplossingen

c. $2:3=4:6$

Opgave 14:

a.



b. $rc_k = 2$ dus $\tan\alpha = 2$ dus $\alpha = 63{,}4°$
$rc_l = -\frac{1}{2}$ dus $\tan\beta = -\frac{1}{2}$ dus $\beta = -26{,}6°$
het verschil tussen α en β is $90°$ dus staan de lijnen loodrecht op elkaar

Opgave 15:

a. $\frac{3}{p-1} = \frac{p}{p+4}$
$p(p-1) = 3(p+4)$
$p^2 - p = 3p + 12$
$p^2 - 4p - 12 = 0$
$(p-6)(p+2) = 0$
$p = 6 \quad \vee \quad p = -2$

b. $rc_k \cdot rc_l = -1$
$-\frac{3}{p} \cdot -\frac{p-1}{p+4} = -1$
$\frac{3(p-1)}{p(p+4)} = -1$
$3p - 3 = -p(p+4)$
$3p - 3 = -p^2 - 4p$
$p^2 + 7p - 3 = 0$
$p = \frac{-7 \pm \sqrt{61}}{2}$

Opgave 16:

$\frac{p}{q+3} = \frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$
$\frac{p}{q+3} = \frac{4}{1}$
$p = 4(q+3)$
$p = 4q + 12$
$\frac{q}{p-1} = \frac{4}{1}$
$q = 4(p-1)$
$q = 4p - 4$
$q = 4(4q+12) - 4$
$q = 16q + 48 - 4$
$-15q = 44$
$q = -\frac{44}{15}$
$p = 4 \cdot -\frac{44}{15} + 12 = \frac{4}{15}$

Opgave 17:

a. $rc_{AB} = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

$rc_{AB} \cdot rc_m = -1$

$rc_m = \dfrac{-1}{rc_{AB}} = -\frac{1}{3}$

punt M is het midden van AB dus $M(2,5)$

$y - 5 = -\frac{1}{3}(x-2)$

$y - 5 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$

b. omdat $d(C,A) = d(C,B)$ ligt punt C op de middelloodlijn van AB
dus punt C is het snijpunt van de lijnen l en m

$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3} \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$

$2x - 3(-\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}) = 6$

$2x + x - 17 = 6$

$3x = 23$

$x = 7\frac{2}{3}$

$y = -\frac{1}{3} \cdot 7\frac{2}{3} + 5\frac{2}{3} = 3\frac{1}{9}$

Opgave 18:

punt M is het snijpunt van de middelloodlijnen van ΔOAB .

$rc_{OA} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

lijn l is de middelloodlijn van OA dus $rc_l = \dfrac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$

punt P is het midden van OA dus $P(4,1)$

lijn l: $y - 1 = -4 \cdot (x-4)$

$y - 1 = -4x + 16$

$y = -4x + 17$

$rc_{OB} = \frac{6}{2} = 3$

lijn m is de middelloodlijn van OB dus $rc_{OB} = \dfrac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

punt Q is het midden van OB dus $Q(1,3)$

lijn m: $y - 3 = -\frac{1}{3} \cdot (x-1)$

$y - 3 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$

snijpunt van l en m: $-4x + 17 = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$

$-3\frac{2}{3}x = -13\frac{2}{3}$

$x = 3\frac{8}{11}$

$y = -4 \cdot 3\frac{8}{11} + 17 = 2\frac{1}{11}$

dus het middelpunt is $(3\frac{8}{11}, 2\frac{1}{11})$

Opgave 19:

a. $x_B = p$ dus $y_B = -3 \cdot x_B + 10 = -3p + 10$

dus $B(p,-3p+10)$

b. $rc_{OB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3p+10}{p}$

$rc_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3p+10-2}{p-6}=\frac{-3p+8}{p-6}$

c. $\angle OBA=90°$ dus $rc_{AB}\cdot rc_{OB}=-1$

$\frac{-3p+8}{p-6}\cdot\frac{-3p+10}{p}=-1$

$(-3p+8)(-3p+10)=-p(p-6)$

$9p^2-54p+80=-p^2+6p$

$10p^2-60p+80=0$

$p^2-6p+8=0$

$(p-2)(p-4)=0$

$p=2 \quad \vee \quad p=4$

d. $B(2,4) \quad \vee \quad B(4,-2)$

Opgave 20:

punt C is het punt $(p,p-2)$

$rc_{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{p-2-2}{p-2}=\frac{p-4}{p-2}$

$rc_{BC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{p-2}{p-10}$

$rc_{AC}\cdot rc_{BC}=-1$

$\frac{p-4}{p-2}\cdot\frac{p-2}{p-10}=-1$

$(p-4)(p-2)=-(p-2)(p-10)$

$p^2-6p-8=-p^2+12p-20$

$2p^2-18p+28=0$

$p^2-9p+14=0$

$(p-2)(p-7)=0$

$p=2 \quad \vee \quad p=7$

$C(2,0) \quad \vee \quad C(7,5)$

punt C ligt boven de x-as dus $C(7,5)$

9.2 Punten, lijnen en afstanden.

Opgave 21:

$x_B - x_A = 7 - 1 = 6$

$y_B - y_A = 5 - 2 = 3$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Opgave 22:

a. $d(A,B) = \sqrt{(5 - -3)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

b. $\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$

$(x+3)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y+2)^2$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4$

$16x - 12y = 4$

$4x - 3y = 1$

Opgave 23:

a. $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}$

$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$

$4x + 12y = 24$

$m: \quad x + 3y = 6$

$\sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}$

$(x-7)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2$

$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$

$-12x + 12y = -24$

$n: \quad x - y = 2$

b. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x - y = 2 \quad - \end{cases}$

$4y = 4$

$y = 1$

$x = 3$

$S(3,1)$

c. punt S is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔABC

Opgave 24:

lijn m is de middelloodlijn van AB

$\sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$

$(x+1)^2 + (y+3)^2 = (x-7)^2 + (y-1)^2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$

$16x + 8y = 40$

$m: \quad 2x + y = 5$

lijn n is de middelloodlijn van AC

$\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$

$(x+1)^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-4)^2$

$x^2+2x+1+y^2+6y+9=x^2+4x+4+y^2-8y+16$

$-2x+14y=10$

$n: \quad -x+7y=5$

punt S is het snijpunt van de lijnen m en n

$\begin{cases} 2x+y=5 & \times 1 \\ -x+7y=5 & \times 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=5 & \\ -2x+14y=10 & + \end{cases}$

$15y=15$

$y=1$

$x=2$

$S(2,1)$

$d(A,S)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Opgave 25:

a. je cirkelt vanuit $M(1,4)$ een touwtje om van lengte 5 dus ontstaat een cirkel met straal 5

b. $(x-1)^2+(y-4)^2=100$

c. $d(M,O)=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$(x-1)^2+(y-4)^2=17$

d. $M(-2,3)$ en $r=\sqrt{5}$

Opgave 26:

a. $d(A,M)=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$

$(x+2)^2+(y-1)^2=26$

b. $d(N, x-as)=2$

$(x-4)^2+(y+2)^2=4$

c. lijn m is de middelloodlijn van PQ

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}$

$(x-1)^2+(y-2)^2=(x-7)^2+(y-2)^2$

$x^2-2x+1=x^2-14x+49$

$12x=48$

$x=4$

lijn n is de middelloodlijn van PR

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$

$(x-1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y-6)^2$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2-6x+9+y^2-12y+36$

$4x+8y=40$

$x+2y=10$

punt M is het snijpunt van de lijnen m en n

$$\begin{cases} x = 4 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$4 + 2y = 10$

$2y = 6$

$y = 3$

$M(4,3)$

$d(M,P) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$

Opgave 27:

a. $A(2,0) \quad B(0,4)$

$AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b. $Opp(\Delta OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC$

dus $OA \cdot OB = AB \cdot OC$

$OA = 2 \quad OB = 4$

$2 \cdot 4 = 2\sqrt{5} \cdot OC$

$OC = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

Opgave 28:

lijn l: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = c$ door (x_P, y_P)

$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{x_P}{2} + \frac{y_P}{4}$

Opgave 29:

lijn k: $3x + 4y = 24$

$P(-2,-1)$ dus lijn l: $3x + 4y = -10$

$d(P,k) = \frac{|3 \cdot -2 + 4 \cdot -1 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{25}} = \frac{34}{5}$

$d(O,k) = \frac{|24|}{\sqrt{25}} = \frac{24}{5}$

$d(O,l) = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5}$

dus $d(O,k) + d(O,l) = \frac{24}{5} + \frac{10}{5} = \frac{34}{5} = d(P,k)$

Opgave 30:

$\frac{|3x - 4y + 12|}{\sqrt{25}} = \frac{|4x - 3y + 6|}{\sqrt{25}}$

$|3x - 4y + 12| = |4x - 3y + 6|$

$3x - 4y + 12 = 4x - 3y + 6 \quad \vee \quad 3x - 4y + 12 = -4x + 3y - 6$

$-x-y=-6 \quad \vee \quad 7x-7y=-18$
$m: \quad x+y=6 \qquad n: \quad 7x-7y=-18$

Opgave 31:

a. $P(0,-2)$ ligt op lijn l

$$d(P,k)=\frac{|3\cdot 0+-4\cdot -2+12|}{\sqrt{25}}=\frac{|20|}{5}=4$$

b. $P(x,y)$ ligt op de middenparallel m van k en l, dus $d(P,k)=d(P,l)$

$$\frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{25}}=\frac{|3x-4y-8|}{\sqrt{25}}$$
$$|3x-4y+12|=|3x-4y-8|$$
$3x-4y+12=3x-4y-8 \quad \vee \quad 3x-4y+12=-3x+4y+8$
$12=-8 \quad \vee \quad 6x-8y=-4$
kan niet $\quad \vee \quad 3x-4y=-2$
dus $3x-4y=-2$

Opgave 32:

a. $$\frac{|3x+4y-12|}{\sqrt{25}}=2$$
$$|3x+4y-12|=10$$
$3x+4y-12=10 \quad \vee \quad 3x+4y-12=-10$
$3x+4y=22 \quad \vee \quad 3x+4y=2$

b. $P(p,0)$
$$\frac{|3p-12|}{\sqrt{25}}=3$$
$$|3p-12|=15$$
$3p-12=15 \quad \vee \quad 3p-12=-15$
$3p=27 \quad \vee \quad 3p=-3$
$p=9 \quad \vee \quad p=-1$
$(9,0)$ en $(0,-1)$

Opgave 33:

a. lijn AB: $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$
$8x+6y=48$
$$d(P,C)=\frac{|8\cdot 11+6\cdot 12-48|}{\sqrt{100}}=11{,}2$$

b. $rc_{BC}=\frac{12-0}{11-6}=\frac{12}{5}$

lijn BC: $y-0=\frac{12-0}{11-6}\cdot(x-6)$
$y=\frac{12}{5}(x-6)$

$rc_{AD} = \dfrac{-1}{rc_{BC}} = \dfrac{-1}{\frac{12}{5}} = -\frac{5}{12}$

lijn AD: $y = -\frac{5}{12}x + b$ door $(0,8)$

$y = -\frac{5}{12}x + 8$

snijpunt van AD en BC:

$\frac{12}{5}(x-6) = -\frac{5}{12}x + 8$

$\frac{12}{5}x - 14\frac{2}{5} = -\frac{5}{12}x + 8$

$2\frac{49}{60}x = 22\frac{2}{5}$

$x = 7\frac{161}{169}$

$y = 4\frac{116}{169}$

c. lijn AB: $8x + 6y = 48$ ofwel $4x + 3y = 24$

lijn BC: $y = \frac{12}{5}(x-6)$

$5y = 12(x-6)$

$5y = 12x - 72$

$12x - 5y = 72$

$$\frac{|4x+3y-24|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x-5y-72|}{\sqrt{169}}$$

$13 \cdot |4x+3y-24| = 5 \cdot |12x-5y-72|$

$52x + 39y - 312 = 60x - 25y - 360 \quad \vee \quad 52x + 39y - 312 = -60x + 25y + 360$

$-8x + 64y = -48 \quad \vee \quad 112x + 14y = 672$

$x - 8y = 6 \quad \vee \quad 8x + y = 48$

de lijn $x - 8y = 6$ snijdt het lijnstuk AC niet

lijn AC: $y - 8 = \dfrac{12-8}{11-0} \cdot (x-0)$

$y - 8 = \frac{4}{11}x$

$y = \frac{4}{11}x + 8$

AC snijden met de lijn $8x + y = 48$

$8x + \frac{4}{11}x + 8 = 48$

$8\frac{4}{11}x = 40$

$x = 4\frac{18}{23}$

$y = \frac{4}{11} \cdot 4\frac{18}{23} + 8 = 9\frac{17}{23}$

$E(4\frac{18}{23}, 9\frac{17}{23})$

9.3 Parametervoorstellingen van lijnen.

Opgave 34:

a. 3 naar rechts en 1 omhoog is dezelfde richting als 6 naar rechts en 2 omhoog

b. ja, ja

Opgave 35:

a. $\underline{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$k: \quad x + 3y = c$ door $(2,5)$

$x + 3y = 17$

b. $\underline{r}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$l: \quad x + 2y = c$ door $(0,3)$

$x + 2y = 6$

Opgave 36:

a. $\underline{n}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

het punt $(0,-5)$ ligt op k

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

b. $\underline{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_l = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

het punt $(0,0)$ ligt op l

$$\begin{cases} x = 7\lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$$

Opgave 37:

a. $\underline{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{n}_l$

$l: \quad 3x - 2y = c$ door $(3,-7)$

$3x - 2y = 23$

b. $\underline{n}_n = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \underline{n}_m$

$\underline{r}_m = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -7 + 7\lambda \end{cases}$

Opgave 38:

a. $\underline{r}_m = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{n}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$m: \quad x + 2y = c$ door $(1,2)$

$x + 2y = 5$

$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \quad - \end{cases}$

$-3y = -3$

$y = 1$

$x = 2 + y = 2 + 1 = 3$

$S(3,1)$

Opgave 39:

$\underline{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\underline{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$l: \quad 3x + y = c$ door $(-3,1)$

$3x + y = -8$

bissectrice van *k* en *l*:

$\frac{|x + 3y + 7|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x + y + 8|}{\sqrt{10}}$

$|x + 3y + 7| = |3x + y + 8|$

$x + 3y + 7 = 3x + y + 8 \quad \vee \quad x + 3y + 7 = -3x - y - 8$

$-2x + 2y = 1 \quad \vee \quad 4x + 4y = -15$

$\begin{cases} -2x + 2y = 1 & \times 2 \\ 4x + 3y = -1 & \times 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + 4y = -15 \\ 4x + 3y = -1 \quad - \end{cases}$

$\begin{cases} -4x + 4y = 2 \\ 4x + 3y = -1 \quad + \end{cases}$

$y = -14$ en $x = 10\frac{1}{4}$

$7y = 1$

$y = \frac{1}{7}$ en $x = -\frac{5}{14}$

Opgave 40:

a. $P(2,0)$

$AP = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\underline{r}_{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\underline{r}_{PQ}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$Q = P + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,0) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (4,1)$

b. $P(4,0)$

$AP = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$PQ = 2\sqrt{2}$

$\underline{r}_{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\underline{r}_{PQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$Q = P + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (4,0) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (6,2)$

c. $P(6,0)$

$AP = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$PQ = \sqrt{13}$

$\underline{r}_{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|\underline{r}_{PQ}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$Q = P + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (6,0) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (8,3)$

d. ja

$\underline{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus $\underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x - 2y = c$ door $(4,1)$

$x - 2y = 2$

Opgave 41:

$P(0,\lambda)$

$AP=\sqrt{6^2+\lambda^2}=\sqrt{36+\lambda^2}$

$\underline{r}_{PA}=\begin{pmatrix}6\\-\lambda\end{pmatrix}$

$\underline{r}_{PQ}=\begin{pmatrix}\lambda\\6\end{pmatrix}$

$Q=P+\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\6\end{pmatrix}=(0,\lambda)+\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\6\end{pmatrix}=(\frac{2}{3}\lambda,4+\lambda)$

dus Q ligt op de lijn: $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\lambda\\y=4+\lambda\end{cases}$

$\underline{r}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dus $\underline{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$3x-2y=c$ door $(0,4)$

$3x-2y=-8$

Opgave 42:

$P(6+\lambda,0)$ dan $Q(0,2+2\lambda)$

$M(3+\frac{1}{2}\lambda,1+\lambda)$

Punt M beweegt over de lijn l: $\begin{cases}x=3+\frac{1}{2}\lambda\\y=1+\lambda\end{cases}$

$\underline{s}_l=(3,1)$ en $\underline{r}_l=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\underline{n}_l=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$l:\quad 2x-y=c$ door $(3,1)$

$l:\quad 2x-y=5$

Opgave 43:

$\underline{r}_{OQ}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$|\underline{r}_{OQ}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

stel $Q=(3\lambda,4\lambda)$ dan heeft Q snelheid 5

dan geldt: $P(10\lambda,0)$

$M=(6\frac{1}{2}\lambda,2\lambda)$

$\underline{r}=\begin{pmatrix}6\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}$

$\underline{n}=\begin{pmatrix}4\\-13\end{pmatrix}$

$4x-13y=0$

Opgave 44:

$P(\lambda,\lambda)$

$\underline{r}_{AP} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - 4 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_{PQ} = \begin{pmatrix} 4-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

$Q = P + \frac{2}{3} \cdot \underline{r}_{PQ} = (\lambda,\lambda) + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = (\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\lambda, \frac{5}{3}\lambda)$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\underline{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$5x - y = c$ door $(-\frac{8}{3},0)$

$5x - y = 13\frac{1}{3}$

9.4 Cirkel en raaklijn

Opgave 45:

$(x-3)^2+(y-2)^2=25$

$x^2-6x+9+y^2-4y+4=25$

$x^2+y^2-6x-4y-12=0$

Opgave 46:

$x^2+y^2+by+15=0$

$x^2+(y+\frac{1}{2}b)^2-\frac{1}{4}b^2+15=0$

$x^2+(y+\frac{1}{2}b)^2=\frac{1}{4}b^2-15$

het is een cirkel als geldt:

$\frac{1}{4}b^2-15\geq 0$

$\frac{1}{4}b^2\geq 15$

$b^2\geq 60$

$b\leq -\sqrt{60} \quad \vee \quad b\geq \sqrt{60}$

$b\leq -2\sqrt{15} \quad \vee \quad b\geq 2\sqrt{15}$

Opgave 47:

a. vul in $x=0$ en $y=0$ dan geldt: $0=0$

dus het punt $(0{,}0)$ ligt op de cirkel

b. $\begin{cases} 100+10a=0 \\ 16+36+4a+6b=0 \end{cases}$

$10a=-100$

$a=-10$

$52+4\cdot -10+6b=0$

$6b=-12$

$b=-2$

$x^2+y^2-10x-2y=0$

$(x-5)^2-25+(y-1)^2-1=0$

$(x-5)^2+(y-1)^2=26$

dus $M(5{,}1)$

c. $x^2+y^2+2bx+by=0$

$(x+b)^2-b^2+(y+\frac{1}{2}b)^2-\frac{1}{4}b^2=0$

$(x+b)^2+(y+\frac{1}{2}b)^2=1\frac{1}{4}b^2$

$1\frac{1}{4}b^2=5$

$b^2=4$

$b=2 \quad \vee \quad b=-2$ (vervalt)

$a=4$

dus $M(-2,-1)$

Opgave 48:

a. $x^2 + y^2 + ax - 5y + 6 = 0$

$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + (y - 2\tfrac{1}{2})^2 - 6\tfrac{1}{4} + 6 = 0$

$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 + (y - 2\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}$

voor iedere waarde van a geldt dat $\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4} > 0$ dus heb je altijd een cirkel

b. $\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4} > 25$

$\tfrac{1}{4}a^2 > 24\tfrac{3}{4}$

$a^2 > 99$

$a < -\sqrt{99} \quad \vee \quad a > \sqrt{99}$

$a < -3\sqrt{11} \quad \vee \quad a > 3\sqrt{11}$

c. $M(-\tfrac{1}{2}a, 2\tfrac{1}{2})$

$-\tfrac{1}{2}a - 2 \cdot 2\tfrac{1}{2} + 2 = 0$

$-\tfrac{1}{2}a - 5 + 2 = 0$

$-\tfrac{1}{2}a = 3$

$a = -6$

Opgave 49:

a. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 24 = 0$

$(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 24 = 0$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 37$

dus $M(-2,3)$ en $r = \sqrt{37}$

$AM = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} < \sqrt{37}$ dus punt A ligt binnen de cirkel

b. $P(\lambda, 6-\lambda)$

$PM = \sqrt{(\lambda+2)^2 + (6-\lambda-3)^2}$

$= \sqrt{(\lambda+2)^2 + (3-\lambda)^2}$

$= \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 9}$

$= \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 13}$

$2\lambda^2 - 2\lambda + 13 < 37$

$2\lambda^2 - 2\lambda - 24 < 0$

$\lambda^2 - \lambda - 12 < 0$

$(\lambda+3)(\lambda-4) = 0$

$\lambda = -3 \quad \vee \quad \lambda = 4$

dus $-3 < \lambda < 4$

Opgave 50:

a. $x - 2y = 2$

$x = 2 + 2y$

$(2 + 2y - 3)^2 + (y-2)^2 = 10$

$(2y-1)^2 + (y-2)^2 = 10$

$4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 4 = 10$

$5y^2 - 8y - 5 = 0$

$y = \frac{8 \pm \sqrt{164}}{10} = \frac{8 \pm 2\sqrt{41}}{10}$

$y = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{41} \quad \vee \quad y = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{41}$

$y = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{41}$ geeft $x = 2 + 2 \cdot (\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{41}) = 3\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{41}$

$y = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{41}$ geeft $x = 2 + 2 \cdot (\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{41}) = 3\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{41}$

dus $(3\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{41}, \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{41})$ en $(3\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{41}, \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{41})$

b. $6x + 4y = 41$

$4y = -6x + 41$

$y = -1\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{4}$

$x^2 + (-1\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{4})^2 - 8x - 2(-1\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{4}) + 10\frac{1}{2} = 0$

$x^2 + 2\frac{1}{4}x^2 - 30\frac{3}{4} + 105\frac{1}{16} - 8x + 3x - 20\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2} = 0$

$3\frac{1}{4}x^2 - 35\frac{3}{4}x + 95\frac{1}{16} = 0$

$52x^2 - 572x + 1521 = 0$

$x = \frac{572 \pm \sqrt{10816}}{104} = \frac{572 \pm 104}{104}$

$x = 6\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 4\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2} \qquad y = 3\frac{1}{2}$

$(6\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en $(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$

<u>Opgave 51:</u>

a. $x^2 - 4x + y^2 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + y^2 = 0$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

$M(2,0)$

b. $(0,0)$ invullen geeft: $0^2 - 4 \cdot 0 + 0^2 = 0$ dus klopt

c. $x^2 - 4x + (ax)^2 = 0$

$x^2 - 4x + a^2x^2 = 0$

$x(x - 4 + a^2x) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x - 4 + a^2x = 0$

$(1 + a^2)x = 4$

$x = \frac{4}{1 + a^2}$

$y = 0 \quad \vee \quad y = a \cdot \frac{4}{1 + a^2} = \frac{4a}{1 + a^2}$

$(0,0)$ en $(\frac{4}{1 + a^2}, \frac{4a}{1 + a^2})$

d. $A = (\frac{4}{\frac{1}{4} + 1}, \frac{1}{\frac{1}{4} + 1}) = (3\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$

e. $a = \frac{3}{4}$ dus $A = (\frac{4}{\frac{9}{16}+1}, \frac{3}{\frac{9}{16}+1}) = (2\frac{14}{25}, 1\frac{23}{25}0$

f. $x_P = \frac{4}{1+a^2} = \frac{50}{13}$

$50(1+a^2) = 52$

$50 + 50a^2 = 52$

$50a^2 = 2$

$a^2 = \frac{1}{15}$

$a = \frac{1}{5} \quad \vee \quad a = -\frac{1}{5}$

punt P onder de x-as dus $y_P < 0$ dus $a = -\frac{1}{5}$

dus $y = -\frac{1}{5}x$

Opgave 52:

a. $y = a(x+1)$

b. $x^2 + a^2(x+1)^2 = 1$

$x^2 + a^2(x^2 + 2x + 1) = 1$

$x^2 + a^2x^2 + 2a^2x + a^2 - 1 = 0$

$(1+a^2)x^2 + 2a^2x + a^2 - 1 = 0$

$D = (2a^2)^2 - 4 \cdot (1+a^2) \cdot (a^2 - 1)$

$D = 4a^4 - 4(-1 + a^4)$

$D = 4a^4 + 4 - 4a^4$

$D = 4$

$x = \frac{-2a^2 \pm \sqrt{4}}{2+2a^2} = \frac{-2a^2 \pm 2}{2+2a^2}$

$x = \frac{-2a^2 - 2}{2+2a^2} = -1 \quad \vee \quad x = \frac{-2a^2 + 2}{2+2a^2} = \frac{1-a^2}{a^2+1}$

$y = a \cdot (\frac{1-a^2}{a^2+1} + 1) = a \cdot (\frac{1-a^2}{a^2+1} + \frac{a^2+1}{a^2+1}) = a \cdot (\frac{2}{a^2+1}) = \frac{2a}{a^2+1}$

c. $a = \frac{1}{2}$ geeft $P(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

$x = \frac{3}{5} \quad y = \frac{4}{5} \quad r = 1$

$a = \frac{3}{5} \quad b = \frac{4}{5} \quad c = 1$

dus $(3,4,5)$

$a = \frac{1}{4}$ geeft $P(\frac{15}{17}, \frac{8}{17})$

$a = \frac{15}{17} \quad b = \frac{8}{17} \quad c = 1$

dus $(15,8,17)$

d. $(5,12,13)$ dus $x = \frac{5}{13}$ en $y = \frac{12}{13}$

$\frac{1-a^2}{a^2+1} = \frac{5}{13}$

$5(a^2+1) = 13(1-a^2)$

$5a^2 + 5 = 13 - 13a^2$

$18a^2 = 8$

$a^2 = \frac{4}{9}$

$a = \frac{2}{3} \quad \vee \quad a = -\frac{2}{3}$ (vervalt)

e. $(708, 13915, 13933)$ dus $x = \frac{708}{13933}$

$\dfrac{1-a^2}{a^2+1} = \frac{708}{13933}$

$708(a^2+1) = 13933(1-a^2)$

$708a^2 = 708 = 13933 - 13933a^2$

$14641a^2 = 13225$

$a^2 = \frac{13225}{14641}$

$a = \frac{115}{121} \quad \vee \quad a = -\frac{115}{121}$ (vervalt)

Opgave 53:

a. $y = 2x+5$

$x^2 + (2x+5)^2 = 10$

$x^2 + 4x^2 + 20x + 25 = 10$

$5x^2 + 20x + 15 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$x = -3 \quad \vee \quad x = -1$

$y = 3 \qquad\quad y = -1$

dus $(-3,-1)$ en $(-1,3)$

b. $y = 2x + 5\sqrt{2}$

$x^2 + (2x+5\sqrt{2})^2 = 10$

$x^2 + 4x^2 + 20x\sqrt{2} + 50 = 10$

$5x^2 + 20x\sqrt{2} + 40 = 0$

$x^2 + 4x\sqrt{2} + 8 = 0$

$D = (4\sqrt{2})^2 - 4\cdot 1\cdot 8 = 32 - 32 = 0$

dus er is één oplossing, dus raakt de lijn de cirkel

Opgave 54:

a. $rc_m = -\frac{1}{3}$ en $M(0,0)$

lijn m: $y = -\frac{1}{3}x$

$x^2 + (-\frac{1}{3}x)^2 = 10$

$x^2 + \frac{1}{9}x^2 = 10$

$1\frac{1}{9}x^2 = 10$

$x^2 = 9$

$x = 3 \quad \vee \quad x = -3$

$y = -1 \qquad y = 1$

$A(3,-1) \quad B(-3,1)$

door A: $y+1 = 3(x-3)$ dus $y = 3x-10$

door B: $y-1 = 3(x+3)$ dus $y = 3x+10$

b. lijn door $(10,0)$: $y = a(x-10)$

$x^2 + a^2(x-10)^2 = 10$

$x^2 + a^2(x^2 - 20x + 100) = 10$

$x^2 + a^2x^2 - 20a^2x + 100a^2 - 10 = 0$

$(1+a^2)x^2 - 20a^2x + 100a^2 - 10 = 0$

$D = (-20a^2)^2 - 4\cdot(1+a^2)(100a^2 - 10)$

$= 400a^4 - 4(100a^4 + 90a^2 - 10)$

$= 400a^4 - 400a^4 - 360a^2 + 40$

$= -360a^2 + 40 = 0$

$-360a^2 = -40$

$a^2 = \frac{1}{9}$

$a = \frac{1}{3} \quad \vee \quad a = -\frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}(x-10)$ en $y = -\frac{1}{3}(x-10)$

Opgave 55:

Het punt $A(x_A, y_A)$ ligt op de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$

De raaklijn k aan de cirkel staat loodrecht op de straal OA.

$\underline{r}_{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \underline{n}_k$

dus $x_A \cdot x + y_A \cdot y = c$ door het punt $A(x_A, y_A)$

dus ${x_A}^2 + {y_A}^2 = c$

omdat punt A op de cirkel ligt geldt: ${x_A}^2 + {y_A}^2 = r^2$

dus $c = r^2$

dus de raaklijn k is: $x_A \cdot x + y_A \cdot y = r^2$

Opgave 56:

a. $2x + 3y = 13$

b. l: $y = 1\frac{1}{2}x + b$

$1\frac{1}{2}x - y + b = 0$

$d(M,l) = \dfrac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13}$

$\dfrac{|b|}{\sqrt{3\frac{1}{4}}} = \sqrt{13}$

$|b| = \sqrt{42\frac{1}{4}}$

$|b| = 6\frac{1}{2}$

$b = 6\frac{1}{2} \quad \vee \quad b = -6\frac{1}{2}$

l_1: $y = 1\frac{1}{2}x - 6\frac{1}{2}$ en l_2: $y = 1\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$

c. lijn l door $(4\frac{1}{3}, 0)$

$y = a(x - 4\frac{1}{3})$

$y = ax - 4\frac{1}{3}a$

$ax - y - 4\frac{1}{3}a = 0$

$d(M,l) = \frac{|0 - 0 - 4\frac{1}{3}a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13}$

$\frac{|-4\frac{1}{3}a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{13}$

$|4\frac{1}{3}a| = \sqrt{13(a^2 + 1)}$

$18\frac{7}{9}a^2 = 13(a^2 + 1)$

$18\frac{7}{9}a^2 = 13a^2 + 13$

$5\frac{7}{9}a^2 = 13$

$a^2 = 2\frac{1}{4}$

$a = 1\frac{1}{2} \quad \vee \quad a = -1\frac{1}{2}$

$l_1: \quad y = 1\frac{1}{2}(x - 4\frac{1}{3})$ en $l_2: \quad y = -1\frac{1}{2}(x - 4\frac{1}{3})$

d. lijn l door $(1,5)$

$y - 5 = a(x - 1)$

$y - 5 = ax - a$

$ax - y + 5 - a = 0$

$d(M,l) = \frac{|0 - 0 + 5 - a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13}$

$\frac{|5 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{13}$

$|5 - a| = \sqrt{13(a^2 + 1)}$

$(5 - a)^2 = 13(a^2 + 1)$

$a^2 - 10a + 25 = 13a^2 + 13$

$12a^2 + 10a - 12 = 0$

$a = \frac{-10 \pm \sqrt{676}}{24} = \frac{-10 \pm 26}{24}$

$a = \frac{2}{3} \quad \vee \quad a = -1\frac{1}{2}$

$l_1: \quad y = \frac{2}{3}(x - 1)$ en $l_2: \quad y = -1\frac{1}{2}(x - 1)$

<u>Opgave 57:</u>

a. lijn l door $(-4,-1)$

$y + 1 = a(x + 4)$

$y + 1 = ax + 4a$

$ax - y + 4a - 1 = 0$

$d(M,l) = \frac{|0 - 0 + 4a - 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{17}$

$$\frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{17}$$

$|4a-1|=\sqrt{17(a^2+1)}$

$(4a-1)^2=17(a^2+1)$

$16a^2-8a+1=17a^2+17$

$a^2+8a+16=0$

$(a+4)^2=0$

$a=-4$

$l: \quad y+1=-4(x+4)$

dus $l: \quad 4x+y=-17$

b. $l: \quad 4x-y=3$

$-y=-4x+3$

$y=4x-3$

$rc_l=4$

$rc_m=-\frac{1}{4}$

$m: \quad y=-\frac{1}{4}x+b$

$\frac{1}{4}x+y-b=0$

$$d(M,m)=\frac{|0-0-b|}{\sqrt{(\frac{1}{4})^2+1^2}}=\sqrt{17}$$

$$\frac{|-b|}{\sqrt{1\frac{1}{16}}}=\sqrt{17}$$

$|-b|=\sqrt{\frac{289}{16}}$

$b^2=\frac{289}{16}$

$b=\frac{17}{4} \quad \vee \quad b=-\frac{17}{4}$

$m_1: \quad y=-\frac{1}{4}x+4\frac{1}{4}$ en $m_2: \quad y=-\frac{1}{4}x-4\frac{1}{4}$

c. lijn l door $(0,17)$

$y=ax+17$

$ax-y+17=0$

$$d(M,l)=\frac{|0-0+17|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{17}$$

$$\frac{|17|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{17}$$

$|17|=\sqrt{17(a^2+1)}$

$289=17(a^2+1)$

$289=17a^2+17$

$17a^2=272$

$a^2=16$

$a=4 \quad \vee \quad a=-4$

$l_1: \quad y = 4x + 17$ en $l_2: \quad y = -4x + 17$

9.5 Pool, poollijn, macht en machtlijn.

Opgave 58:

a. de raaklijn door (x_A, y_A) is $x_A \cdot x + y_A \cdot y = r^2$
raaklijn door $(-1,2)$ is $-x + 2y = 5$
raaklijn door $(2,-1)$ is $2x - y = 5$

b. P is het snijpunt van k en l

$$\begin{cases} -x+2y=5 \\ 2x-y=5 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+2y=5 \\ 4x-2y=10 \quad + \end{cases}$$

$3x = 15$
$x = 5$
$10 - y = 5$
$-y = -5$
$y = 5$
$P(5,5)$

c. $rc_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1-2}{2--1} = \dfrac{-3}{3} = -1$

lijn AB: $y - 2 = -(x+1)$
$y - 2 = -x - 1$
$x + y = 1$

$P(5,5)$ dus $5x + 5y = 5$
$x + y = 1$

Opgave 59:

Opgave 60:

a. $c_2: \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \xrightarrow{T(-x_{\backslash m}, -y_M)} (x + x_M - x_M)^2 + (y + y_M - y_M)^2 = r^2$
dus $c_1: \quad x^2 + y^2 = r^2$
$P(x_P, y_P) \xrightarrow{T(-x_M, y_M)} P'(x_P - x_M, y_P - y_M)$
$k: \quad (x_P - x_M) \cdot x + (y_P - y_M) \cdot y = r^2$

b. door de translatie van c_1, k en P' over (x_M, y_M) krijg je de poollijn van P en c_2.
$k: (x_P - x_M) \cdot x + (y_P - y_M) \cdot y = r^2 \xrightarrow{T(x_M, y_M)}$
$k': (x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) = r^2$

c. $\underline{n}_l = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix}$

$\underline{r}_{MP} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} = \underline{n}_l$

dus $PM \perp l$

Opgave 61:

a. poollijn l van A is: $4x+8y=40$

$4x=40-8y$

$x=10-2y$

l snijden met c geeft:

$(10-2y)^2+y^2=40$

$100-40y+4y^2+y^2=40$

$5y^2-40y+60=0$

$y^2-8y+12=0$

$(y-2)(y-6)=0$

$y=2 \quad \vee \quad y=6$

$x=6 \qquad\quad x=-2$

raaklijn in $(6,2)$ is: $6x+2y=40$

raaklijn in $(-2,6)$ is: $-2x+6y=40$

b. $x^2+y^2-4x-2y=0$

$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1=0$

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

de poollijn van B is:

$(1-2)(x-2)+(4-1)(y-1)=5$

$-(x-2)+3(y-1)=5$

$-x+2+3y-3=5$

$-x+3y=6$

$-x=6-3y$

$l: \quad x=3y-6$

l snijden met c geeft:

$(3y-6-2)^2+(y-1)^2=5$

$(3y-8)^2+(y-1)^2=5$

$9y^2-48y+64+y^2-2y+1=5$

$10y^2-50y+60=0$

$y^2-5y+6=0$

$(y-2)(y-3)=0$

$y=2 \quad \vee \quad y=3$

$x=0 \qquad\quad x=3$

raaklijn door $(0,2)$ is:

$(0-2)(x-2)+(2-1)(y-1)=5$

$-2(x-2)+y-1=5$

$-2x+4+y-1=5$

$-2x+y=2$

raaklijn door $(3,3)$ is:

$(3-2)(x-2)+(3-1)(y-1)=5$

$x-2+2(y-1)=5$

$x-2+2y-2=5$

$x+2y=9$

Opgave 62:

a. $y=-2x+5$

$2x+y=5$

$4x+2y=10$

b. bij de cirkel $x^2+y^2=10$ en $P(x_P,y_P)$ is de poollijn van P de lijn $x_P\cdot x+y_P\cdot y=10$

dus als $P(4,2)$ krijg je de lijn $4x+2y=10$

c. $y=-x-4$

$x+y=-4$

$-2\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}y=10$

dus $Q(-2\frac{1}{2},-2\frac{1}{2})$

Opgave 63:

a. de poollijn l van A is:

$2rx+0y=r^2$

$2rx=r^2$

$l:\quad x=\frac{1}{2}r$

l snijden met c geeft:

$(\frac{1}{2}r)^2+y^2=r^2$

$\frac{1}{4}r^2+y^2=r^2$

$y^2=\frac{3}{4}r^2$

$y=\frac{1}{2}r\sqrt{3}\quad\vee\quad y=-\frac{1}{2}r\sqrt{3}$

raaklijn in $(\frac{1}{2}r,\frac{1}{2}r\sqrt{3})$ is: $\frac{1}{2}rx+\frac{1}{2}r\sqrt{3}\cdot y=r^2$

dus $x+y\sqrt{3}=2r$

raaklijn in $(-\frac{1}{2}r,-\frac{1}{2}r\sqrt{3})$ is: $\frac{1}{2}rx-\frac{1}{2}r\sqrt{3}\cdot y=r^2$

dus $x-y\sqrt{3}=r^2$

b. de poollijn l van B is:

$0x+4ry=r^2$

$4y=r$

$y=\frac{1}{4}r$

l snijden met c geeft:

$x^2+(\frac{1}{4}r)^2=r^2$

$x^2+\frac{1}{16}r^2=r^2$

$x^2=\frac{15}{16}r^2$

$x=\frac{1}{4}r\sqrt{15}\quad\vee\quad x=-\frac{1}{4}r\sqrt{15}$

raaklijn in $(\frac{1}{4}r\sqrt{15},\frac{1}{4}r)$ is: $\frac{1}{4}r\sqrt{15}\cdot x+\frac{1}{4}r\cdot y=r^2$

dus: $x\sqrt{15}+y=4r$

raaklijn in $(-\frac{1}{4}r\sqrt{15},\frac{1}{4}r)$ is: $-\frac{1}{4}r\sqrt{15}\cdot x+\frac{1}{4}r\cdot y=r^2$

dus: $-x\sqrt{15}+y=4r$

c. de poollijn l van C is:

$r\cdot x+2r\cdot y=r^2$

$r \cdot x = r^2 - 2r \cdot y$

$x = r - 2y$

l snijden met c geeft:

$(r-2y)^2 + y^2 = r^2$

$r^2 - 4r \cdot y + 4y^2 + y^2 = r^2$

$5y^2 - 4r \cdot y = 0$

$y(5y - 4r) = 0$

$y = 0 \quad \vee \quad 5y = 4r$

$y = 0 \quad \vee \quad y = \frac{4}{5}r$

$x = r \qquad\quad x = -\frac{3}{5}r$

raaklijn in $(r,0)$ is: $r \cdot x + 0 \cdot y = r^2$

dus: $x = r$

raaklijn in $(-\frac{3}{5}r, \frac{4}{5}r)$ is: $-\frac{3}{5}r \cdot x + \frac{4}{5}r \cdot y = r^2$

dus: $3x - 4y = -5r$

Opgave 64:

a. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$

$(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + 20 = 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$

poollijn l door $(0,0)$:

$(0-4)(x-4) + (0-3)(y-3) = 5$

$-4(x-4) - 3(y-3) = 5$

$-4x + 16 - 3y + 9 = 5$

$-4x - 3y = -20$

$-4x = 3y - 20$

$x = -\frac{3}{4}y + 5$

l snijden met c geeft:

$(-\frac{3}{4}y + 5 - 4)^2 + (y-3)^2 = 5$

$(-\frac{3}{4}y + 1)^2 + (y-3)^2 = 5$

$\frac{9}{16}y^2 - 1\frac{1}{2}y + 1 + y^2 - 6y + 9 = 5$

$1\frac{9}{16}y^2 - 7\frac{1}{2}y + 5 = 0$

$25y^2 - 120y + 80 = 0$

$$y = \frac{120 \pm \sqrt{6400}}{50} = \frac{120 \pm 80}{50}$$

$y = 4 \quad \vee \quad y = \frac{4}{5}$

$x = 2 \qquad\quad x = 4\frac{2}{5}$

raaklijn door $(2,4)$ is: $2x + 4y = 5$

raaklijn door $(4\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ is: $4\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = 5$ dus $22x + 4y = 25$

b. poollijn l door $(3,0)$:

$(3-4)(x-4) + (0-3)(y-3) = 5$

$-(x-4) - 3(y-3) = 5$

$-x+4-3y+9=5$
$-x-3y=-8$
$-x=3y-8$
$x=-3y+8$
l snijden met c geeft:
$(-3y+8-4)^2+(y-3)^2=5$
$(-3y+4)^2+(y-3)^2=5$
$9y^2-24y+16+y^2-6y+9=5$
$10y^2-30y+20=0$
$y^2-3y+2=0$
$(y-1)(y-2)=0$
$y=1 \quad \vee \quad y=2$
$x=5 \qquad\quad x=2$
raaklijn door $(5,1)$ is: $5x+y=5$
raaklijn door $(2,2)$ is: $2x+2y=5$

Opgave 65:

$x^2+y^2-10x-4y+4=0$
$(x-5)^2-25+(y-2)^2-4+4=0$
$(x-5)^2+(y-2)^2=25$

a. $(-6-5)(x-5)+(4-2)(y-2)=25$
$-11(x-5)+2(y-2)=25$
$-11x+55+2y-4=25$
$-11x+2y=-26$

b. k: $(8-5)(x-5)+(6-2)(y-2)=25$
$3(x-5)+4(y-2)=25$
$3x-15+4y-8=25$
$3x+4y=48$
snijpunt met de y-as: $0+4y=48$
$y=12$ dus $C(0,12)$
poollijn l van C:
$(0-5)(x-5)+(12-2)(y-2)=25$
$-5(x-5)+10(y-2)=25$
$-5x+25+10y-20=25$
$-5x+10y=20$
$-5x=-10y+20$
$x=2y-4$
l snijden met c geeft:
$(2y-4-5)^2+(y-2)^2=25$
$(2y-9)^2+(y-2)^2=25$
$4y^2-36y+81+y^2-4y+4=25$
$5y^2-40y+60=0$

$y^2 - 8y + 12 = 0$
$(y-2)(y-6) = 0$
$y = 2 \quad \vee \quad y = 6$
$x = 0 \qquad x = 8$
dus $D(0,2)$

Opgave 66:

a. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 5 = 0$
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$
$M(3,1)$

b. $PM = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

c. $PM^2 - r^2 = 45 - 5 = 40$
P invullen geeft: $9^2 + 4^2 - 6 \cdot 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 40$
de uitkomsten zijn gelijk

d. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
$(x + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 + c = 0$
$(x + \frac{1}{2}a)^2 + (y + \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c$
$M(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}b)$
$PM = \sqrt{(x_P + \frac{1}{2}a)^2 + (y_P + \frac{1}{2}b)^2}$
$PM^2 - r^2 = (x_P + \frac{1}{2}a)^2 + (y_P + \frac{1}{2}b)^2 - (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - c)$
$= x_P{}^2 + ax_P + \frac{1}{4}a^2 + y_P{}^2 + by_P + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 + c$
$= x_P{}^2 + y_P{}^2 + ax_P + by_P + c$

Opgave 67:

a. als *r* de straal van c_1 is geldt: $r^2 = (-1)^2 + 2^2 - 8 \cdot -1 - 4 \cdot 2 + 10 = 15$
$c_1: \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 15$
$c_4: \quad (x-1)^2 + (y-4)^2 - 9 = 0$

b. als *r* de straal is van c_3 geldt: $r^2 = (6-1)^2 + (5-4)^2 - 9 = 17$
$c_3: \quad (x-6)^2 + (y-5)^2 = 17$

Opgave 68:

$c_1: \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$
$c_2: \quad x^2 + y^2 = 10y + 2$
$x^2 + y^2 - 10y - 2 = 0$
$x^2 + (y-5)^2 - 25 - 2 = 0$
$x^2 + (y-5)^2 - 27 = 0$
$M_{c_2} = (0,5)$
als *r* de straal is van cirkel c_3 met $M(0,5)$ die c_1 loodrecht snijdt, geldt:
$r^2 = 0^2 + 5^2 - 8 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 12 = 27$

$c_3: \quad x^2+(y-5)^2=27$ en dat is de vergelijking van c_2 dus $c_2=c_3$, dus c_1 en c_2 snijden elkaar loodrecht

Opgave 69:

a. $P(p,0)$

$c_1: \quad (p+1)^2+(0-5)^2=10$

$p^2+2p+1+25=10$

$p^2+2p+16=0$

$c_2: \quad (p-7)^2+(0-2)^2=5$

$p^2-14p+49+4=5$

$p^2-14p+48=0$

$p^2+2p+16=p^2-14p+48$

$16p=32$

$p=2$

$P(2,0)$

b. $Q(q,6-q)$

$c_3: \quad q^2+(6-q)^2-8=0$

$q^2+36-12q+q^2-8=0$

$2q^2-12q+28=0$

$c_4: \quad q^2+(6-q)^2-12\cdot q+34=0$

$q^2+36-12q+q^2-12q+34=0$

$2q^2-24q+70=0$

$2q^2-12q+28=2q^2-24q+70$

$12q=42$

$q=3\frac{1}{2}$

$Q(3\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$

Opgave 70:

a. $c_2: \quad x^2+y^2+4x+8y+10=0$

$(x+2)^2-4+(y+4)^2-16+10=0$

$(x+2)^2+(y+4)^2-10=0$

$M_{c_2}(-2,-4)$

als r de straal van de cirkel c_3 is die c_1 loodrecht snijdt, geldt:

$r^2=(-2)^2+(-4)^2-6\cdot-2-2\cdot-4+5=45$

$c_3: \quad (x+2)^2+(y+4)^2=45$

b. $c_1: \quad x^2+y^2-6x-2y+5=0$

$(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+5=0$

$(x-3)^2+(y-1)^2=5$

$M_{c_1}(3,1)$ en $M_{c_2}(-2,-4)$

lijn M_1M_2 : $y-1=\frac{-4-1}{-2-3}\cdot(x-3)$

$y-1=x-3$

$y=x-2$

punt $P(p,p-2)$

$(p-3)^2+(p-2-1)^2-5=(p+2)^2+(p-2+4)^2-10$

$p^2-6p+9+p^2-6p+9-5=p^2+4p+4+p^2+4p+4-10$

$-20p=-15$

$p=\frac{3}{4}$

$P(\frac{3}{4},-1\frac{1}{4})$

c. $P(x,y)$ heeft macht 20 t.o.v. c_1 dus

$(x-3)^2+(y-1)^2-5=20$

$(x-3)^2+(y-1)^2=25$

Opgave 72:

a. ${x_P}^2+{y_P}^2-4={x_P}^2+{y_P}^2-8x_P-8y_P+30$

$8x_P+8y_P=34$

$4x_P+4y_P=17$

b. de punten *P* liggen op de lijn $4x+4y=17$

c. ${x_P}^2+{y_P}^2+ax_P+by_P+c={x_P}^2+{y_P}^2+px_P+qy_P+r$

$ax_P-px_P+by_P-qy_P+c-r=0$

$(a-p)x_P+(b-q)y_P+c-r=0$

dus de punten *P* liggen op de lijn : $(a-p)x+(b-q)y+c-r=0$

Opgave 73:

c_1 : $x^2+y^2-5=0$

c_2 : $x^2+y^2+2x-4y-10=0$

machtlijn van c_1 en c_2 is: $x^2+y^2-5=x^2+y^2+2x-4y-10$

$2x-4y=5$

raaklijn door *A* aan c_1 is: $x+2y=5$

$$\begin{cases}2x-4y=5 \\ x+2y=5\end{cases}\quad\begin{vmatrix}\times 1 \\ \times 2\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}2x-4y=5 \\ 2x+4y=10\end{cases}\quad +$$

$4x=15$

$x=3\frac{3}{4}$

$3\frac{3}{4}+2y=5$

$2y=1\frac{1}{4}$

$y=\frac{5}{8}$

$M(3\frac{3}{4},\frac{5}{8})$

$r^2 = (3\tfrac{3}{4})^2 + (\tfrac{5}{8})^2 - 5 = 9\tfrac{29}{64}$

$c_3: \quad (x - 3\tfrac{3}{4})^2 + (y - \tfrac{5}{8})^2 = 9\tfrac{29}{64}$

Opgave 74:

machtlijn van c_1 en c_2 is: $x^2 + y^2 - 5 = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15$

$8x + 6y = 20$

$8x = 20 - 6y$

$x = 2\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}y$

$(2\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}y)^2 + y^2 = 5$

$6\tfrac{1}{4} - 3\tfrac{3}{4}y + \tfrac{9}{16}y^2 + y^2 = 5$

$1\tfrac{9}{16}y^2 - 3\tfrac{3}{4}y + 1\tfrac{1}{4} = 0$

$25y^2 - 60y + 20 = 0$

$$y = \frac{60 \pm \sqrt{1600}}{50} = \frac{60 \pm 40}{50}$$

$y = \tfrac{2}{5} \quad \vee \quad y = 2$

$x = 2\tfrac{1}{5} \qquad x = 1$

$(2\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5})$ en $(1,2)$

Opgave 75:

$c_1: \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$(x + \tfrac{1}{2}a)^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + (y + \tfrac{1}{2}b)^2 - \tfrac{1}{4}b^2 + c = 0$

$M_1(-\tfrac{1}{2}a, -\tfrac{1}{2}b)$

$c_2: \quad x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$

$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + (y + \tfrac{1}{2}q)^2 - \tfrac{1}{4}q^2 + r = 0$

$M_2(-\tfrac{1}{2}p, -\tfrac{1}{2}q)$

$$rc_{M_1M_2} = \frac{-\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}b}{-\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}a} = \frac{-q + b}{-p + a}$$

machtlijn k van c_1 en c_2 is: $x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 + px + qy + r$

$ax - px + by - qy = r - c$

$(a - p)x + (b - q)y = r - c$

$(b - q)y = (p - a)x + r - c$

$$y = \frac{p - a}{b - q} \cdot x + \frac{r - c}{b - q}$$

$$rc_k = \frac{p - a}{b - q}$$

$$rc_k \cdot rc_{M_1M_2} = \frac{p - a}{b - q} \cdot \frac{-q + b}{-p + a} = \frac{p - a}{b - q} \cdot \frac{b - q}{a - p} = \frac{p - a}{a - p} = \frac{-(a - p)}{a - p} = -1$$

dus $k \perp M_1M_2$

Opgave 76:

machtlijn van c_1 en c_2: $x^2 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 - 12x - 6y + 26$

$12x + 6y = 30$

$2x + y = 5$

$y = -2x + 5$

stel punt P ligt op de machtlijn, dan geldt: $P(p, -2p+5)$

punt P heeft macht 6 ten opzichte van c_1 dus:

$p^2 + (-2p+5)^2 - 4 = 6$

$p^2 + 4p^2 - 20p + 25 - 4 = 6$

$5p^2 - 20p + 15 = 0$

$p^2 - 4p + 3 = 0$

$(p-1)(p-3) = 0$

$p = 1 \quad \vee \quad p = 3$

dus $(1,3)$ en $(3,-1)$

Opgave 77:

a. $(x-2)^2 + (y-1)^2 - 5 = (x-8)^2 + (y+2)^2 - 8$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 5 = x^2 - 16x + 64 + y^2 + 4y + 4 - 8$

$12x - 6y = 60$

$2x - y = 10$ dus $y = 2x - 10$

b. stel punt P op de machtlijn k, dan geldt $P(p, 2p-10)$

punt P heeft macht 8 ten opzichte van c_1 dus:

$(p-2)^2 + (2p-10-1)^2 - 5 = 8$

$p^2 - 4p + 4 + 4p^2 - 44p + 121 - 5 = 8$

$5p^2 - 48p + 112 = 0$

$$p = \frac{48 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{48 \pm 8}{10}$$

$p = 4 \quad \vee \quad p = 5\frac{3}{5}$

dus $(4,-2)$ en $(5\frac{3}{5}, 1\frac{1}{5})$

c. stel punt P op de machtlijn k, dan geldt $P(p, 2p-10)$

de macht van P ten opzichte van c_1 is:

$macht = (p-2)^2 + (2p-10-1)^2 - 5$

$= p^2 - 4p + 4 + 4p^2 - 44p + 121 - 5$

$= 5p^2 - 48p + 120$

de macht is minimaal als $[macht]' = 0$

$[macht]' = 10p - 48 = 0$

$10p = 48$

$p = 4\frac{4}{5}$

$P(4\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$

9.6 Analytische methoden bij lijnen en cirkels.

Opgave 78:

a. $rc_{AM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$rc_{BN} = \frac{-4}{2} = -2$

$rc_{AM} \cdot rc_{BN} = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1$ dus $AM \perp BN$

$\left.\begin{array}{l}\angle MBS = \angle NBC \\ \angle BSM = 90° = \angle BCN\end{array}\right\}$ $\Delta BSM \infty \Delta BCN$ (hh)

b. $AM = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$BN = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\frac{BM}{BN} = \frac{SM}{CN}$ dus $\frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{SM}{2}$

$SM = \frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

c. $AS = AM - SM = 2\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5} = 1\frac{3}{5}\sqrt{5}$

$AS : SM = 1\frac{3}{5}\sqrt{5} : \frac{2}{5}\sqrt{5} = 4:1$

Opgave 79:

Stel dat de eenheid een willekeurig getal c is, met $c \neq 0$, dan geldt:

OM: $y = \frac{c}{2c} \cdot x$ ofwel $y = \frac{1}{2}x$

BN: $y = -\frac{2c}{c} \cdot x + 4c$ ofwel $y = -2x + 4c$

$\frac{1}{2}x = -2x + 4c$

$2\frac{1}{2}x = 4c$

$x = \frac{8}{5}c$

dus $S(\frac{8}{5}c, \frac{4}{5}c)$

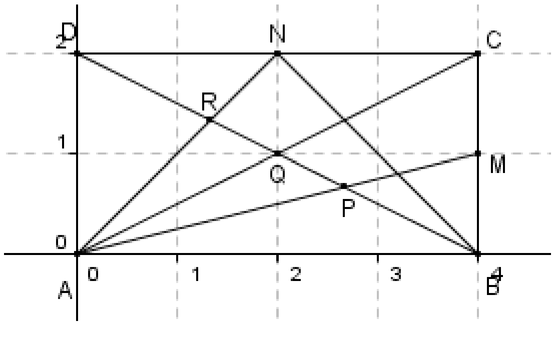
$D(0,2c)$

$DS = \sqrt{(\frac{8}{5}c)^2 + (\frac{6}{5}c)^2} = \sqrt{\frac{64}{25}c^2 + \frac{36}{25}c^2} = \sqrt{\frac{100}{25}c^2} = 2c$

ook $OD = 2c$ dus $DS = OD$ ofwel $DS = AD$:

dus de geldigheid van het bewijs hangt niet af van de grootte van c

Opgave 80:



Kies de oorsprong in punt A

lijn AM: $y = \frac{1}{4}x$

lijn BN: $rc = \frac{-2}{2} = -1$ door $(2,2)$

$y - 2 = -(x - 2)$

$y = -x + 4$

punt P is het snijpunt van AM en BN:

$\frac{1}{4}x = -x + 4$

$1\frac{1}{4}x = 4$

$x = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

$y = \frac{4}{5}$ dus $P(3\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$

lijn *AN*: $y = x$
lijn *AC*: $y = \frac{1}{2}x$
lijn *DP*: $rc = \dfrac{2-\frac{4}{5}}{0-3\frac{1}{5}} = \dfrac{1\frac{1}{5}}{-3\frac{1}{5}} = -\frac{3}{8}$ door $(0,2)$
$y = -\frac{3}{8}x + 2$
punt *Q* is het snijpunt van *AN* en *DP*:
$x = -\frac{3}{8}x + 2$
$1\frac{3}{8}x = 2$
$x = \frac{16}{11}$
$y = \frac{16}{11}$ dus $Q(\frac{16}{11}, \frac{16}{11})$
punt *R* is het snijpunt van *AC* en *DP*:
$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{8}x + 2$
$\frac{7}{8}x = 2$
$x = \frac{16}{7}$
$y = \frac{16}{14}$ dus $R(\frac{16}{7}, \frac{16}{14})$
het midden van *PQ* is $(2\frac{26}{35}, \frac{34}{35})$
dus punt *R* is niet het midden van *PQ*

Opgave 81:

a. $rc_{AC} = \frac{c}{-a} = -\frac{c}{a}$
lijn *k* loodrecht op *AC* dus $rc_k = \frac{-1}{rc_{AC}} = \frac{-1}{-\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}$
lijn *k* door $(b,0)$
$k: \quad y = \frac{a}{c}(x - b)$
als $x = 0$ dan $y = -\frac{ab}{c}$ dus $H(0, -\frac{ab}{c})$

b. lijn *l* is de middelloodlijn van *AB* dus
$l: \quad x = \frac{b+a}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$
lijn *m* is de middelloodlijn van *AC* dus $rc_m = \frac{a}{c}$ en *m* gaat door $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c)$
$m: \quad y - \frac{1}{2}c = \frac{a}{c}(x - \frac{1}{2}a)$
punt *M* is het snijpunt van *l* en *m*:
$y - \frac{1}{2}c = \frac{a}{c} \cdot (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a)$
$y = \frac{1}{2}c + \frac{ab}{2c} = \frac{c^2}{2c} + \frac{ab}{2c} = \frac{ab+c^2}{2c}$

c. zwaartelijn z_1 gaat door punt *C* en het midden *P* van *AB*
$P(\frac{a+b}{2}, 0)$
$z_1: \quad y - c = \dfrac{0-c}{\frac{a+b}{2} - 0} \cdot x$
$y = \dfrac{-c}{\frac{a+b}{2}} \cdot x + c$
$y = \dfrac{-2c}{a+b} \cdot x + c$
zwaartelijn z_2 gaat door punt *B* en het midden *Q* van *AC*
$Q(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c)$

$z_2: \quad y = \dfrac{0 - \frac{1}{2}c}{b - \frac{1}{2}a} \cdot (x - b)$

$y = \dfrac{c}{a - 2b} \cdot (x - b)$

Z is het snijpunt van z_1 en z_2:

$\dfrac{-2c}{a+b} \cdot x + c = \dfrac{c}{a-2b} \cdot (x - b)$

$\dfrac{-2c}{a+b} \cdot x = \dfrac{c}{a-2b} \cdot x - \dfrac{bc}{a-2b} - c$

$\dfrac{-2c}{a+b} \cdot x - \dfrac{c}{a-2b} \cdot x = -\dfrac{bc}{a-2b} - c$

$\dfrac{2c}{a+b} \cdot x + \dfrac{c}{a-2b} \cdot x = \dfrac{bc}{a-2b} + c$

$\left(\dfrac{2c}{a+b} + \dfrac{c}{a-2b}\right) \cdot x = \dfrac{bc}{a-2b} + c$

$\left(\dfrac{2c(a-2b) + c(a+b)}{(a+b)(a-2b)}\right) \cdot x = \dfrac{bc}{a-2b} + \dfrac{c(a-2b)}{a-2b}$

$\dfrac{3ac - 3bc}{(a+b)(a-2b)} \cdot x = \dfrac{ac - bc}{a-2b}$

$x = \dfrac{(a+b)(a-2b)}{3ac - 3bc} \cdot \dfrac{ac - bc}{a-2b}$

$x = \dfrac{a+b}{3}$

$y = \dfrac{-2c}{a+b} \cdot \dfrac{a+b}{3} + c = \frac{-2}{3}c + c = \frac{1}{3}c = \frac{c}{3}$

d. $HZ: \quad y - -\frac{ab}{c} = \dfrac{\frac{c}{3} - -\frac{ab}{c}}{\frac{a+b}{3} - 0} \cdot x$

$y + \frac{ab}{c} = \dfrac{\frac{c^2+3ab}{3c}}{\frac{a+b}{3}} \cdot x$

$y = \frac{c^2+3ab}{c(a+b)} \cdot x - \frac{ab}{c}$

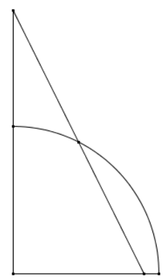
$x_M = \frac{a+b}{2}$

$y_M = \frac{c^2+3ab}{c(a+b)} \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{ab}{c} = \frac{c^2+3ab}{2c} - \frac{ab}{c} = \frac{c^2+3ab}{2c} - \frac{2ab}{2c} = \frac{c^2+ab}{2c}$ klopt

dus punt M ligt op de lijn HZ

dus de punt M, H en Z liggen op één lijn

Opgave 82:



Opgave 83:

a. assenstelsel met $A(-\frac{1}{2}d,0)$ en $B(\frac{1}{2}d,0)$

punt P ligt op de cirkels $(x+\frac{1}{2}d)^2+y^2=r^2$ en $(x-\frac{1}{2}d)^2+y^2=k^2r^2$

dus P op $x^2+dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=r^2$ en $x^2-dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=k^2r^2$

$$\begin{cases} x^2+dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=r^2 \\ x^2-dx+\frac{1}{4}d^2+y^2=k^2r^2 \quad - \end{cases}$$

$$2dx=r^2-k^2r^2$$

$$2dx=r^2\cdot(1-k^2)$$

$$r^2=\frac{2dx}{1-k^2}$$

$$(x+\frac{1}{2}d)^2+y^2=\frac{2dx}{1-k^2}$$

$$x^2+dx+\frac{1}{4}d^2-\frac{2dx}{1-k^2}+y^2=0$$

$$x^2+\frac{d(1-k^2)x}{1-k^2}-\frac{2dx}{1-k^2}+y^2=-\frac{1}{4}d^2$$

$$x^2+\frac{d(-1-k^2)}{1-k^2}x+y^2=-\frac{1}{4}d^2$$

$$x^2+\frac{d(k^2+1)}{k^2-1}x+y^2=-\frac{1}{4}d^2$$

$$\left(x+\frac{1}{2}d\cdot\frac{k^2+1}{k^2-1)}\right)^2-\frac{1}{4}d^2\cdot\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=-\frac{1}{4}d^2$$

$$\left(x+\frac{1}{2}d\cdot\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}d^2\cdot\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-\frac{1}{4}d^2$$

en dit is een cirkel met middelpunt $\left(-\frac{1}{2}d\cdot\frac{k^2+1}{k^2-1},0\right)$ en straal $\sqrt{\frac{1}{4}d^2\cdot\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-\frac{1}{4}d^2}$

b. als $k=1$ geldt: $AP=BP$ dus dan liggen alle punten P op de middelloodlijn van AB

Opgave 84:

a. $C(1,a)$

cirkel: $(x-1)^2+y^2=1$

D is het snijpunt van lijn AC en de cirkel, dus:

$$(x-1)^2+a^2x^2=1$$

$$x^2-2x+1+a^2x^2=1$$

$$(a^2+1)x^2-2x=0$$

$$x((a^2+1)x-2)=0$$

$$x=0 \quad \vee \quad (a^2+1)x=2$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=\frac{2}{a^2+1}$$

$$(0,0) \qquad \left(\frac{2}{a^2+1},\frac{2a}{a^2+1}\right)$$

b. $x_C-x_E=x_D-x_C$

$x_E = 2x_C - x_D = 2 - \dfrac{2}{a^2+1} = \dfrac{2(a^2+1)-2}{a^2+1} = \dfrac{2a^2}{a^2+1}$

zo ook: $y_E = 2y_C - y_D = 2a - \dfrac{2a}{a^2+1} = \dfrac{2a(a^2+1)-2a}{a^2+1} = \dfrac{2a^3}{a^2+1}$

dus $E\left(\dfrac{2a^2}{a^2+1}, \dfrac{2a^3}{a^2+1}\right)$

c. lijn BE: $y - 0 = \dfrac{0 - \frac{2a^3}{a^2+1}}{2 - \frac{2a^3}{a^2+1}} \cdot (x-2)$

$y = \dfrac{-\frac{2a^3}{a^2+1}}{\frac{2(a^2+1)-2a^2}{a^2+1}} \cdot (x-2)$

$y = \dfrac{-\frac{2a^3}{a^2+1}}{\frac{2}{a^2+1}} \cdot (x-2)$

$y = -a^3 \cdot (x-2)$

punt F ligt op lijn BE, dus $x_F = 1$ dus $y_F = a^3$

$MB = 1$

$MF = a^3$

$MC = y_C = a$ dus $MC^3 = a^3$

$MF \cdot MB^2 = a^3 \cdot 1^2 = a^3 = MC^3$

9.7 Diagnostische toets

Opgave 1:

a. $3p-4=p+2$

$2p=6$

$p=3$

b. $\frac{3p}{1}=\frac{3}{4}$

$3p=\frac{3}{4}$

$p=\frac{1}{4}$

c. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=3$

$5x+4y=60$

$\frac{3p}{1}=\frac{5}{4}$

$3p=\frac{5}{4}$

$p=\frac{5}{12}$

d. $rc_{x-as}=0$

$3p=0$

$p=0$

Opgave 2:

a. $\frac{3}{p}=\frac{p}{p+6}$

$p^2=3(p+6)$

$p^2=3p+18$

$p^2-3p-18=0$

$(p-6)(p+3)=0$

$p=6 \quad \vee \quad p=-3$

b. $k_p: \quad 3x+py=6$

$py=-3x+6$

$y=-\frac{3}{p}x+\frac{6}{p}$

$rc_{k_p}=-\frac{3}{p}$

$l_p: \quad px+(p+6)y=p+2$

$(p+6)y=-px+p+2$

$y=-\frac{p}{p+6}x+\frac{p+2}{p+6}$

$rc_{l_p}=-\frac{p}{p+6}$

$rc_k \cdot rc_l=-1$

$-\frac{3}{p}\cdot -\frac{p}{p+6}=-1$

$\frac{3p}{p(p+6)}=-1$

$3p=-p(p+6)$

$3p=-p^2-6p$

$p^2+9p=0$

$p(p+9)=0$

$p=0 \quad \vee \quad p=-9$

c. snijpunt met de y-as dus $x=0$

$$\begin{cases} py = 6 \\ (p+6)y = p+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{p} \\ (p+6)y = p+2 \end{cases}$$

$$(p+6)\cdot\frac{6}{p} = p+2$$

$$(p+6)\cdot 6 = p(p+2)$$

$$6p+36 = p^2+2p$$

$$p^2-4p-36=0$$

$$p = \frac{4\pm\sqrt{160}}{2} = 2\pm\sqrt{40} = 2\pm 2\sqrt{10}$$

$$p = 2+2\sqrt{10} \quad \vee \quad p = 2-2\sqrt{10}$$

Opgave 3:

a. $r = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$

$(x-2)^2+(y+1)^2 = 40$

b. k is de middelloodlijn van AB

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$(x-2)^2+(y+1)^2 = (x-4)^2+(y-5)^2$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1 = x^2-8x+16+y^2-10y+25$

$4x+12y=36$

$x+3y=9$

l is de middelloodlijn van AC

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}$

$(x-2)^2+(y+1)^2 = (x-6)^2+(y-3)^2$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1 = x^2-12x+36+y^2-6y+9$

$8x+8y=40$

$x+y=5$

M is het snijpunt van k en l:

$$\begin{cases} x+3y=9 \\ x+y=5 \quad - \end{cases}$$

$2y=4$

$y=2$

$x=3$ dus $M(3,2)$

$r = d(A,M) = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

c. M is het midden van AB

$M(3,2)$

$r = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$(x-3)^2+(y-2)^2 = 10$

Opgave 4:

a. $\frac{|x+2y-6|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2x+y-10|}{\sqrt{5}}$

$|x+2y-6| = |-2x+y-10|$

$x+2y-6 = -2x+y-10 \quad \vee \quad x+2y-6 = 2x-y+10$

$3x+y = -4 \quad \vee \quad -x+3y = 16$

b. $P(0, p)$

$\frac{|2p-6|}{\sqrt{5}} = 2$

$|2p-6| = 2\sqrt{5}$

$2p-6 = 2\sqrt{5} \quad \vee \quad 2p-6 = -2\sqrt{5}$

$2p = 6+2\sqrt{5} \quad \vee \quad 2p = 6-2\sqrt{5}$

$p = 3+\sqrt{5} \quad \vee \quad p = 3-\sqrt{5}$

$P(0{,}3+\sqrt{5})$ of $P(0{,}3-\sqrt{5})$

Opgave 5:

a. de lijn BC is een verticale lijn , dus lijn BC is $x = 4$

$d(A, BC) = 2$

b. lijn AB: $rc = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + b$ door $(2{,}1)$

$1 = 1 + b$

$b = 0$

$y = \frac{1}{2}x$ ofwel $x - 2y = 0$

willekeurig punt P op de x-as: $P(p{,}0)$

$d(P, AB) = \frac{|p|}{\sqrt{5}}$

$d(P, BC) = \frac{|p-4|}{\sqrt{1}}$

$\frac{|p|}{\sqrt{5}} = \frac{|p-4|}{1}$

$|p| = \sqrt{5} \cdot |p-4|$

$p = \sqrt{5} \cdot (p-4) \quad \vee \quad p = -\sqrt{5} \cdot (p-4)$

$p = p\sqrt{5} - 4\sqrt{5} \quad \vee \quad p = -p\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

$p - p\sqrt{5} = -4\sqrt{5} \quad \vee \quad p + p\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$p(1-\sqrt{5}) = -4\sqrt{5} \quad \vee \quad p(1+\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

$p = \frac{-4\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{-4\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{-4\sqrt{5}-20}{1-5} = \sqrt{5}+5$

$\vee \quad p = \frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}-20}{1-5} = -\sqrt{5}+5$

$P(5+\sqrt{5},0) \quad \vee \quad P(5-\sqrt{5},0)$

Opgave 6:

a. $k: \quad 2x+3y=12$

$\underline{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

lijn k gaat door $(6,0)$

$\begin{cases} x = 6+3\lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

b. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\underline{r}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dus $\underline{n}_l = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$l: \quad 4x+3y=c$ door $(-2,5)$

$l: \quad 4x+3y=7$

Opgave 7:

Stel $Q(p, \frac{3}{4}p)$

dan $OQ = \sqrt{p^2 + (\frac{3}{4}p)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{9}{16}p^2} = \sqrt{\frac{25}{16}p^2} = \frac{5}{4}p$

dan $P(\frac{15}{4}p,0)$

$M(\frac{19}{8}p, \frac{3}{8}p)$

$rc_{OM} = \dfrac{\frac{3}{8}p}{\frac{19}{8}p} = \frac{3}{19}$

lijn $OM: \quad y = \frac{3}{19}x$ ofwel $3x-19y=0$

Opgave 8:

a. $x^2+y^2+ax-4y+13=0$

$(x+\frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + (y-2)^2 - 4 + 13 = 0$

$(x+\frac{1}{2}a)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}a^2 - 9$

$\frac{1}{4}a^2 - 9 \geq 0$

$\frac{1}{4}a^2 \geq 9$

$a^2 \geq 36$

$a \leq -6 \quad \vee \quad a \geq 6$

b. $M(-\frac{1}{2}a,2)$

als M op l ligt dan geldt: $2 \cdot -\frac{1}{2}a + 3 \cdot 2 = 5$

$-a+6=5$

$-a=-1$

$a=1$

Maar voor $a = 1$ heb je geen cirkel, dus M ligt niet op l.

Opgave 9:

a. $k: \quad -x - 3y = 10$

dus $x + 3y = 10$

b. $l: \quad 3x - y + c = 0$

$d(M,l) = r$ dus $\dfrac{|0 - 0 + c|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$

$|c| = 10$

$c = 10 \quad \vee \quad c = -10$

$l_1: \quad 3x - y + 10 = 0$ en $l_2: \quad 3x - y - 10 = 0$

c. lijn l door $(4,2)$ dus $y - 2 = a(x - 4)$

$ax - y + 2 - 4a = 0$

$d(M,l) = r$ dus $\dfrac{|0 - 0 + 2 - 4a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10}$

$|2 - 4a| = \sqrt{10a^2 + 10}$

$16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 10$

$6a^2 - 16a - 6 = 0$

$a = \dfrac{16 \pm \sqrt{400}}{12} = \dfrac{16 \pm 20}{12}$

$a = 3 \quad \vee \quad a = -\frac{1}{3}$

$l_1: \quad y - 2 = 3(x - 4)$ en $l_2: \quad y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 4)$

d. $m: \quad 3x + y - 5 = 0$

$l \perp m$ dus $l: \quad x - 3y + c = 0$

$d(M,l) = r$ dus $\dfrac{|0 - 0 + c|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$

$|c| = 10$

$l_1: \quad x - 3y + 10 = 0$ en $l_2: \quad x - 3y - 10 = 0$

Opgave 10:

a. $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$

$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 0$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

poollijn p ten opzichte van $A(-3,4)$ is:

$(-3 - 3)(x - 3) + (4 - 2)(y - 2) = 13$

$-6(x - 3) + 2(y - 2) = 13$

$-6x + 18 + 2y - 4 = 13$

$-6x + 2y = -1$

b. poollijn p ten opzichte van $B(2,-3)$ is:

$(2 - 3)(x - 3) + (-3 - 2)(y - 2) = 13$

$-(x - 3) - 5(y - 2) = 13$

$-x+3-5y+10=13$

$x+5y=0$

$x=-5y$

p snijden met c geeft:

$25y^2+y^2+30y-4y=0$

$26y^2+26y=0$

$26y(y+1)=0$

$y=0 \quad \vee \quad y=-1$

raakpunten $(0,0)$ en $(5,-1)$

raaklijn in $(0,0)$ is: $(0-3)(x-3)+(0-2)(y-2)=13$

$-3x+9-2y+4=13$

$3x+2y=0$

raaklijn in $(5,-1)$ is: $(5-3)(x-3)+(-1-2)(y-2)=13$

$2(x-3)-3(y-2)=13$

$2x-6-3y+6=13$

$2x-3y=13$

Opgave 11:

a. $r^2=(-2)^2+(-2)^2-6\cdot -2+8\cdot -2+5=9$

$c_2: \quad (x+2)^2+(y+2)^2=9$

b. $(3+2\lambda)^2+(-4+\lambda)^2-6(3+2\lambda)+8(-4+\lambda)+5=5$

$4\lambda^2+12\lambda+9+\lambda^2-8\lambda+16-18-12\lambda-32+8\lambda+5=5$

$5\lambda^2=25$

$\lambda^2=5$

$\lambda=\sqrt{5} \quad \vee \quad \lambda=-\sqrt{5}$

$(3+2\sqrt{5},-4+\sqrt{5})$ en $3-2\sqrt{5},-4-\sqrt{5})$

Opgave 12:

$c_1: \quad x^2+y^2-4x-2y=0$

$c_2: \quad (x-4)^2+(y+1)^2=1$

$x^2-8x+16+y^2+2y+1=1$

$x^2-8x+y^2+2y+16=0$

machtlijn m ten opzichte van c_1 en c_2 is:

$(-4--8)x+(-2-2)y-16=0$

$4x-4y=16$

$x-y=4$ dus $x=y+4$

m snijden met c_1 geeft:

$(y+4)^2+y^2-4(y+4)-2y=0$

$y^2+8y+16+y^2-4y-16-2y=0$

$2y^2+2y=0$

$2y(y+1)=0$

$y=0 \quad \vee \quad y=-1$

$x = 4 \quad \vee \quad x = 3$

dus $(4,0)$ en $(3,-1)$

Opgave 13:

stel het raakpunt P is het punt $P(x, y)$

dan is: $rc_{OP} = \frac{y}{x}$

$$rc_{PM} = \frac{0-y}{10-x} = \frac{y}{x-10}$$

$PM \perp OM$ dus $rc_{PM} \cdot rc_{OM} = -1$

$$\frac{y}{x-10} \cdot \frac{y}{x} = -1$$

$$\frac{y^2}{x^2 - 10x} = -1$$

$$y^2 = -1(x^2 - 10x)$$

$$y^2 = -x^2 + 10x$$

$$x^2 - 10x + y^2 = 0$$

$$(x-5)^2 - 25 + y^2 = 0$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 25$$

dus alle punten P liggen op de cirkel met middelpunt $(5,0)$ en straal 5